2 Algèbre et géométrie

2.1 Réduction des endomorphismes normaux via le théorème spectral (148, 150, 151, 152, 157, 158) [8]

Développement ultra classique, une valeur sûre à recaser dans quasiment toutes les leçons d'algèbre linéaire. Le schéma de preuve que j'ai choisi de suivre n'est pas forcément le plus classique, mais je préfère le voir ainsi, car on passe d'un cas particulier au cas général et en plus on peut parler de plein de choses annexes (en plus de pouvoir le caser dans la leçon sur les matrices symétriques et hermitiennes !). Le but est de montrer les trois résultats suivants :

Théorème 2.1 (Théorème spectral)**.** Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $u \in \mathscr{S}(E)$. Alors u est diagonalisable en base orthonormée.

Remarque 2.1.1. *C'est même une équivalence !*

Lemme 2.2 (Matrices unitairement vs orthogonalement semblables)**.** Soient $M, N \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles qu'il existe $U \in U_n(\mathbb{C})$ telle que :

$$M = U^* N U.$$

Alors il existe $O \in O_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$M = O^T N O.$$

Théorème 2.3 (Réduction des endomorphismes normaux)**.**

1. Soient E un espace hermitien et $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme normal, c'est-à-dire tel que $u^* u = u u^*$. Alors u est diagonalisable en base orthonormée.
2. Soient E un espace euclidien et $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme normal. Alors il existe une base orthonormée $\mathscr{B}$ de E, des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_s, a_1, a_2, \dots, a_r$ et des réels non-nuls $b_1, \dots, b_r$ tels que :

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \mathbf{O} & \\ & & \lambda_s & & & & & \\ & & & a_1 & -b_1 & & & \\ & & & b_1 & a_1 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & \mathbf{O} & & & & & a_r & -b_r \\ & & & & & & b_r & a_r \end{pmatrix}$$

Remarque 2.1.2. *Là aussi c'est une équivalence !*

Démonstration. 1. Pour la preuve du théorème spectral, une preuve que j'ai trouvée très agréable est de maximiser la quantité :

$$\langle u(x), x \rangle$$

sur la sphère unité par compacité. (c'est un moyen de parler du théorème spectral dans la leçon sur la compacité !) Cette quantité est très connue et, en divisant par $\|x\|^2$ est appelée quotient de Rayleigh-Ritz. Considérons donc l'application :

$$\begin{array}{rccc} R : & \mathbb{S}_E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \langle u(x), x \rangle. \end{array}$$

Cette application est continue sur le compact $\mathbb{S}_E := \{x \in E \mid \|x\| = 1\}$. Il existe donc un vecteur $x_0 \in \mathbb{S}_E$ tel que :

$$\forall x \in E, \quad \langle u(x), x\rangle \leq \langle u(x_0), x_0\rangle \|x\|^2.$$

Le but est de montrer que $\alpha := \langle u(x_0), x_0\rangle$ est une valeur propre de u. À partir de là, on peut définir la forme bilinéaire symétrique suivante sur E :

$$\forall x, y \in E, \quad b(x, y) = \alpha\langle x, y\rangle - \langle u(x), y\rangle.$$

Cette forme bilinéaire est symétrique positive . Ainsi, l'inégalité de Cauchy-Schwarz est valable :

$$\forall x, y \in E, \quad |b(x, y)| \leq \sqrt{b(x, x)b(y, y)}.$$

En particulier, on a :

$$\forall y \in E, \quad |b(x_0, y)| \leq \sqrt{b(x_0, x_0)b(y, y)} = 0.$$

Ainsi :

$$\forall y \in E, \quad \langle \alpha x_0 - u(x_0), y\rangle = 0.$$

Donc $u(x_0) = \alpha x_0$: α est bien valeur propre de u, et $x_0 \in \mathbb{S}_E$ (donc $\neq 0$) est un vecteur propre associé. À partir de là, en prenant $F = \mathrm{Vect}(x_0)$, on a que $F^\perp$ est stable par u et que $u_{|F^\perp} \in \mathscr{S}(F^\perp)$. On conclut alors par récurrence sur la dimension de E en concaténant le vecteur de norme 1 x_0 à la base orthonormée de vecteurs propres de $u_{|F^\perp}$.

2. Ce résultat se base sur le théorème de la décomposition polaire :

Proposition 2.4 (Décomposition polaire)**.** L'application :

$$\begin{array}{rcrcl} \Pi & : & O_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R}) & \longrightarrow & GL_n(\mathbb{R}) \\ & & (O, S) & \longmapsto & OS \end{array}$$

est bijective (c'est même un homéomorphisme). Pour $P \in GL_n(\mathbb{R})$, $\Pi^{-1}(P)$ est appelée décomposition polaire de P.

On utilisera le fait que si $P \in GL_n(\mathbb{R})$, le S de sa décomposition polaire s'écrit :

$$S = \sqrt{P^T P}$$

et donc S est un polynôme en $P^T P$. Pour rappel, l'existence et l'unicité d'une racine carrée d'une matrice symétrique positive utilise le théorème spectral ! Bref. Si M, N sont deux matrices réelles telles que :

$$M = U^* N U$$

avec $U \in U_n(\mathbb{C})$, alors on a également :

$$M^T = U^* N^T U,$$

par passage à l'adjoint (conjugaison + transposée). Soient $P_1, P_2 \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telles que :

$$U^* = P_1 + iP_2.$$

On a alors :

$$M(P_1 + iP_2) = (P_1 + iP_2)N$$

et :

$$M^T(P_1+iP_2)=(P_1+iP_2)N^T.$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires dans les deux membres des égalités ci-dessus, on a :

$$\begin{aligned} MP_1 &= P_1N, & MP_2 &= P_2N,\\ M^TP_1 &= P_1N^T, & M^TP_2 &= P_2N^T. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a :

$$M(P_1+\lambda P_2)=(P_1+\lambda P_2)N, \quad M^T(P_1+\lambda P_2)=(P_1+\lambda P_2)N^T.$$

Or, le polynôme $Q=\det(P_1+XP_2)\in\mathbb{R}[X]$ est non-nul (car il est non-nul en i). Donc, ses racines sont en nombre fini et donc il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $Q(\lambda)\neq 0$. Pour un tel λ, on a donc :

$$P:=P_1+\lambda P_2\in GL_n(\mathbb{R}).$$

Ainsi, on a montré l'existence d'une matrice $P\in GL_n(\mathbb{R})$ telle que :

$$M=PNP^{-1}, \quad M^T=PN^TP^{-1}.$$

Notons alors $P=OS$ avec $(O,S)\in O_n(\mathbb{R})\times\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$. On a alors :

$$M=OSNS^{-1}O^T.$$

Il suffit alors de montrer que N et S commutent pour avoir le résultat. Or, on a :

$$M=PNP^{-1}=\left(M^T\right)^T=\left(P^{-1}\right)^TNP^T.$$

Donc :

$$P^TPN=NP^TP$$

et donc N commute avec P^TP, donc avec S puisque S est un polynôme en P^TP. On obtient donc au final :

$$M=ONO^T,$$

ce qui conclut.

3. Pour finir, prenons $u\in\mathscr{L}(E)$ un endomorphisme normal avec E hermitien. Étant donné que $\mathbb{C}$ (corps de base de E) est algébriquement clos, u possède une valeur propre. Notons-la λ. Étant donné que u commute avec u^*, on a que l'espace propre $E_\lambda(u)$ est stable par u^*. Ainsi, $E_\lambda(u)^\perp$ est stable par u et on a alors la décomposition :

$$E=E_\lambda(u)\oplus E_\lambda(u)^\perp$$

avec $u_{|E_\lambda(u)^\perp}\in\mathscr{L}\left((E_\lambda(u)^\perp\right)$ normal. On obtient alors la conclusion par récurrence (forte) sur $\dim(E)$ en concaténant une base orthonormale de $E_\lambda(u)$ avec une base orthonormale de vecteurs propres de $u_{|E_\lambda(u)^\perp}$.

Le résultat pour E euclidien se déduit matriciellement du cas sur E hermitien. En effet, fixons une base $\mathscr{B}'$ de E orthonormale et notons $M=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u)$. Matriciellement, le résultat précédent dit que :

$$\forall M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{C}), \quad (MM^*=M^*M)\Longrightarrow\left(\exists U\in U_n(\mathbb{C}),\ \exists\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{C}, \quad M=U^*\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0 & 0\\ 0 & \ddots & 0\\ 0 & 0 & \lambda_n\end{pmatrix}U\right).$$

Ici, $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \subset \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Donc le résultat s'applique :

$$\exists U_1 \in U_n(\mathbb{C}), \quad M = U_1^* \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n \end{pmatrix} U_1$$

avec $\mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M) = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$. Quitte à réordonner, on peut supposer que les valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ sont réelles et que les autres sont complexes non-réelles. Puisque M est une matrice réelle, si $\lambda \in (\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}) \cap \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$, alors $\overline{\lambda} \in \mathrm{Sp}_{\mathbb{C}}(M)$. On peut donc regrouper les valeurs propres ainsi :

$$M = U_1^* \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \mathbf{O} & \\ & & \lambda_s & & & & & \\ & & & a_1 + ib_1 & & & & \\ & & & & a_1 - ib_1 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & & \mathbf{O} & & & & a_r + ib_r & \\ & & & & & & & a_r - ib_r \end{pmatrix} U_1.$$

Reste à montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, les matrices :

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} a+ib & 0 \\ 0 & a-ib \end{pmatrix}$$

sont unitairement semblables. C'est bien le cas, car on a :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & i \\ 1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+ib & a-ib \\ b-ia & b+ia \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+ib & 0 \\ 0 & a-ib \end{pmatrix}$$

et la matrice de passage :

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -i & i \end{pmatrix}$$

est bien unitaire. On a donc l'existence d'une matrice unitaire U telle que :

$$M = U^* \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \mathbf{O} & \\ & & \lambda_s & & & & & \\ & & & a_1 & -b_1 & & & \\ & & & b_1 & a_1 & & & \\ & & & & & \ddots & & \\ & \mathbf{O} & & & & & a_r & -b_r \\ & & & & & & b_r & a_r \end{pmatrix} U.$$

(raisonner par blocs sur la matrice diagonale). Ainsi, les matrices :

$$M \text{ et } \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \mathbf{O} & & \\ & & \lambda_s & & & & & & \\ & & & a_1 & -b_1 & & & & \\ & & & b_1 & a_1 & & & & \\ & & & & & \ddots & & & \\ & \mathbf{O} & & & & & a_r & -b_r \\ & & & & & & b_r & a_r \end{pmatrix}$$

sont réelles et unitairement semblables, donc orthogonalement semblables. Cela conclut donc la preuve.

□

Remarque 2.1.3 (En quoi cette preuve du théorème spectral est intéressante)**.** *Ce qui est bien avec la preuve que j'ai donnée, c'est qu'elle se généralise (presque) aux opérateurs autoadjoints compacts sur un Hilbert quelconque ! En effet, soient H un espace de Hilbert sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $T \in \mathscr{K}(H)$ un opérateur compact. Montrons que la quantité :*

$$\alpha := \max_{\|x\| \leq 1} \langle Tx, x \rangle$$

est bien définie et est valeur propre de T. Remarquons que :

$$\forall x \in \mathbb{B}_H, \quad |\langle Tx, x\rangle| \leq \|Tx\| \|x\| \leq \|T\|_{\mathscr{L}_c(H)}.$$

Ainsi, la quantité :

$$\alpha := \sup_{\|x\| \leq 1} \langle Tx, x \rangle$$

est bien définie. Montrons qu'il s'agit d'un max. Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{B}_H^{\mathbb{N}}$ une suite maximisante, c'est-à-dire telle que :

$$\langle Tx_n, x_n \rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} \alpha.$$

La suite (x_n) vit dans le compact faible $\mathbb{B}_H$. Donc, il existe une extraction φ et un vecteur $x_0 \in \mathbb{B}_H$ tel que :

$$x_{\varphi(n)} \xrightharpoonup[n\to+\infty]{} x_0.$$

De plus, la suite $\left(x_{\varphi(n)}\right)$ est bornée. Ainsi, par compacité de l'opérateur T, il existe une extractrice ψ et un vecteur $y \in H$ tels que :

$$Tx_{\varphi(\psi(n))} \xrightarrow[n\to+\infty]{} y.$$

Or, on a :

$$x_{\varphi(\psi(n))} \xrightharpoonup[n\to+\infty]{} x_0$$

et donc, par continuité de T :

$$Tx_{\varphi(\psi(n))} \xrightharpoonup[n\to+\infty]{} Tx_0.$$

Ainsi, par unicité de la limite faible, $y = Tx_0$ et donc :

$$Tx_{\varphi(\psi(n))} \xrightarrow[n\to+\infty]{} Tx_0.$$

Ainsi, étant donné que $\left(Tx_{\varphi(\psi(n))}\right)$ converge ***en norme*** *vers Tx_0 et que $\left(x_{\varphi(\psi(n))}\right)$ converge faiblement vers x_0, on* *a :*

$$\left\langle Tx_{\varphi(\psi(n))}, x_{\varphi(\psi(n))} \right\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} \left\langle Tx_0, x_0 \right\rangle.$$

Attention ! *Si* $\left(Tx_{\varphi(\psi(n))}\right)$ *ne convergeait pas en norme ça ne marcherait pas ! En effet, si* (e_n) *est une base hilbertienne d'un Hilbert séparable, alors :*

$$e_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0,$$

mais on n'a pas :

$$1 = \langle e_n, e_n\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} \langle 0, 0\rangle = 0.$$

Fin de parenthèse. Rappel :

$$\left\langle Tx_{\varphi(\psi(n))}, x_{\varphi(\psi(n))} \right\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} \left\langle Tx_0, x_0 \right\rangle.$$

Ainsi, on a :

$$\alpha = \langle Tx_0, x_0\rangle,$$

et la même forme bilinéaire qu'utilisée dans la preuve du théorème spectral permet de montrer que :

$$Tx_0 = \alpha x_0.$$

et si T *n'est pas nul, alors* $\alpha \neq 0$ *et donc* $x_0 \neq 0$*. En effet, si* $\alpha = 0$*, alors on aurait :*

$$\forall x \in H, \quad \langle Tx, x\rangle = 0.$$

La forme bilinéaire symétrique $b(x, y) = \langle Tx, y\rangle$ *serait positive et l'inégalité de Cauchy-Schwarz assurerait donc que :*

$$\forall x, y \in H, \quad |b(x, y)| \leq 0.$$

On aurait donc :

$$\forall x, y \in H, \quad \langle Tx, y\rangle = 0,$$

et donc $T = 0$*.*